

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУК УКРАЇНИ**  
**ДОНБАСЬКА ДЕРЖАВНА МАШИНОБУДІВНА АКАДЕМІЯ**  
**Кафедра математики та моделювання**



Затверджую:

Дека́н факультету  
машинобудування

Валерій КАССОВ  
«26» червня 2023р.

Гарант освітньої програми:

Кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Ольга РОВЕНСЬКА  
«20» червня 2023р.

Розглянуто і схвалено на засіданні  
кафедри математики та моделювання  
Протокол №16 від 20.06.2023р.

В.о. зав. кафедри

Ольга РОВЕНСЬКА

## **РОБОЧА ПРОГРАМА**

### **«Основи варіаційного числа»**

галузь знань **01 Освіта/Педагогіка**

спеціальність **014 Середня освіта (Математика)**

**ОПП (магістр) Математика**

**кваліфікація Магістр середньої освіти (математика).**

**Вчитель математики та економіки.**

**Розробник:** Н.С. Грудкіна, канд. техн. наук, доцент

Розроблено за підтримки громадської організації «Smart Maths»

<http://formathematics.com/>

2023-2024 навчальний рік

## 1. РОЗПОДІЛ ГОДИН

Форма навчання	Кредитів ECTS	Годин	Аудиторних годин				Самост. робота	Розподіл за семестрами		
			Лекції	Практичні	Лабораторні	Всього		Екзамени	Заліки	ДЗ
Денна/заочна	5	150	30/8	30/4	–	60/12	90/138	+		

## 2. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Мета вивчення дисципліни** – є формування фундаментальних понять математичного характеру, досягнення студентами високого рівня математичної підготовки, умінь застосування цих понять до розв'язання практичних задач та їх підготовка до професійної роботи з математично обдарованими учнями. Основне завдання курсу полягає у поглибленні знань студентів та оволодінні ними аналітичними і чисельними методами розв'язування оптимізаційних задач, що зводяться до дослідження на екстремум функцій та функціоналів. Наведені методи широко застосовуються у різних областях науково-природничих досліджень. Цей курс вводить студентів у світ сучасної математики, знайомлячи їх з основами математичного моделювання та методами вирішення різних класів задач з дослідження на екстремум функцій та функціоналів за наявності обмежень та без них. У подальшому отримані знання знаходять численні застосування як в інших спеціальних розділах математики, так і в наукових дослідженнях з різних областей та напрямків.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент має опанувати **загальними компетентностями**:

- **аналіз і синтез**: здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- **практична робота**: розуміння предметної області та професійної діяльності, здатність застосовувати професійні знання у практичних ситуаціях, аналізувати, досліджувати та презентувати свій досвід;
- **творчість та інновації**: здатність створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій;
- **інформаційні технології**: засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями;
- **розвиток та самовдосконалення**: здатність проводити самооцінку та аналіз власних досягнень, здатність до самоосвіти та вдосконалення професійних навичок.

**фаховими компетентностями**:

- **фундаментальні знання та розуміння**: здатність використовувати системні знання з фундаментальної математики, економіки та методик їх навчання, фундаментальні знання змісту шкільного курсу математики сучасної школи;
- **професійні навички**: здатність застосовувати сучасні методи й освітні технології навчання, аналізувати особливості сприйняття та засвоєння учнями і студентами навчальної інформації з метою прогнозу ефективності та корекції освітнього процесу;
- **вирішення проблем**: здатність застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей реальних задач і процесів;

- **альтернативна освіта:** здатність здійснювати аналіз та корекцію знань та умінь учнів в умовах диференційованого навчання, здатність ефективно планувати та організовувати різні форми неформальної освіти.

***Завдання вивчення дисципліни*** (математичні вміння та навички):

- оволодіти знаннями та розуміти основи навчальних дисциплін фундаментального циклу, відносяться до базових областей математики та економіки, в обсязі достатньому для успішної роботи у наукових групах;
- оволодіти спеціалізованими концептуальними знаннями, набутими у процесі навчання та/або професійної діяльності на рівні новітніх досягнень, які є основою для оригінального мислення та інноваційної діяльності, зокрема в контексті дослідницької роботи за освітньою програмою;
- будувати математичні моделі, алгоритмізувати розв'язування математичної задачі;
- організовувати пошук відповідних наукових джерел, які мають безпосереднє відношення до фундаментальної математики та актуальних проблем з варіаційного числення та оптимізації, в тому числі з використанням іноземної мови;
- мати уявлення про сучасний математичний апарат, який застосовують в природничих науках, інженерних та економічних дослідженнях;
- усвідомлювати необхідність подальшого навчання, вивчення, аналізу, узагальнення та поширення передового педагогічного досвіду, систематично підвищувати свою професійну кваліфікацію.

***Попередніми умовами успішного вивчення курсу*** «Основи варіаційного числення» є оволодіння основними математичними поняттями, категоріями, методами з математичного аналізу, лінійної та матричної алгебри, хмарних технологій та STEM-освіти, шкільних курсів. Частина розділів курсу є природним розвитком та узагальненням курсу з математичного аналізу, функціонального аналізу, рівнянь математичної фізики та диференціальних рівнянь.

Підвищенню ефективності вивчення курсу сприяє використання всевітньої мережі Інтернет, різноманітних програмних засобів навчального призначення, бібліотек електронних наочностей, офісних і спеціалізованих пакетів (наприклад, MsOffice, Ms PowerPoint, MathCAD, MAPLE та інших). За їх допомогою більш наочним стає вивчення низки тем курсу елементарної математики. Проте слід знайти виважену границю щодо оптимального обсягу застосування цих засобів. Слід усвідомлювати, що зазначені інформаційні технології слугують лише допоміжним елементом пошуку інформації, її наочного подання або урізноманітнення навчальних завдань. Не слід надто захоплюватись уміннями вільно оперувати зазначеними програмно-технічними засобами на шкоду основним завданням вивчення курсу.

### 3. РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

#### Семестр 1 (150 годин)

#### Змістовий модуль 1. Предмет та основні поняття варіаційного числення.

(50 годин)

Предмет варіаційного числення. Приклади задач, що розв'язуються методами варіаційного числення.

Функціонал. Лінійні неперервні функціонали.

Варіація функціонала та її властивості.

#### Змістовий модуль 2. Метод варіацій Варіаційні задачі на екстремум

(50 годин)

Метод варіацій у задачах на безумовний екстремум

Екстремум функціонала за наявності скінченних та диференційних зв'язків.

Ізопериметричні задачі.

#### Змістовий модуль 3. Прямі методи у варіаційних задачах.

(50 годин)

Сутність прямих методів варіаційного числення.

Метод Ейлера. Метод Рітца.

Метод Канторовича. Метод скінченних елементів.

Формулювання спеціальних результатів із їх розподілом за модулями представлені нижче:

Модулі	Зміст програмного результату навчання
<b>Предмет та основні поняття варіаційного числення</b>	Здобувач вищої освіти здатний <ul style="list-style-type: none"><li>– до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;</li><li>– створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій;</li><li>– до засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями;</li><li>– знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, необхідну для розв'язання завдань, у тому числі професійних;</li><li>– застосовувати знання з варіаційного числення до розв'язання стандартних задач та вирішення науково-практичних проблем;</li><li>– застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей.</li></ul>
<b>Метод варіацій Варіаційні задачі на умовний екстремум</b>	Здобувач вищої освіти здатний <ul style="list-style-type: none"><li>– до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;</li><li>– створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій;</li><li>– до засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями;</li><li>– знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, необхідну для розв'язання завдань, у тому числі професійних;</li><li>– застосовувати знання з варіаційного числення до розв'язання стандартних задач та вирішення науково-практичних проблем;</li><li>– застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей.</li></ul>
<b>Прямі методи у варіаційних задачах</b>	Здобувач вищої освіти здатний <ul style="list-style-type: none"><li>– до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;</li><li>– створювати та передавати нові ідеї, генерувати інноваційні рішення відомих проблем або дослідницьких ситуацій;</li><li>– до засвоєння нових знань, оволодіння сучасними інформаційними технологіями;</li><li>– знаходити, оцінювати й використовувати інформацію з різних джерел, необхідну для розв'язання завдань, у тому числі професійних;</li><li>– застосовувати знання з прямих методів варіаційного числення до розв'язання стандартних задач та вирішення науково-практичних проблем;</li><li>– застосовувати сучасні математико-статистичні методи та пакети комп'ютерної математики до створення і аналізу математичних моделей.</li></ul>

#### 4. СТРУКТУРА ТА ТЕХНОЛОГІЧНА КАРТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

##### 4.1 Технологічна карта навчальної дисципліни

##### Семестр 1 (150 години)

на 1 семестр Види занять		Всього	Навчальні тижні																
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Аудитор	Лекції	<b>30</b>	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
	Практичні	<b>30</b>	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
	Лабораторні																		
	Індивідуальні																		
	Поточ. контр.					+					+								
	Контр.роб.(ТО)																		
	Модул. контр						M1					M2					M3		
	Захист курсов																		
	Захист лабор.																		
	Консультації																		
	Атестації										A1							A2	
	Всього	<b>60</b>	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
Самостійні	Курс. проект.																		
	Підгот. до зан	<b>87</b>	6	6	6	5	6	6	6	6	5	6	6	6	6	5	6		
	Розрах.-граф.																		
	Консультації	<b>3</b>				1					1					1			
	Експерсії																		
Всього	<b>90</b>	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6		
Навчальне навантаження студентів		<b>150</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>		

**Підсумковий контроль – іспит**

#### 4.2 Розподіл обсягу дисципліни за видами навчальних занять та темами

№ з/п	Назви змістових модулів і тем	Кількість годин (денна / заочна форма)				
		Усього	в т.ч.			
			Л	П (С)	СРС	Література
1	2	3	4	5	6	7
<b>Семестр 1</b>						
<b>Змістовий модуль 1. Предмет та основні поняття варіаційного числення .</b>						
1.	Предмет варіаційного числення. Приклади задач, що розв'язуються методами варіаційного числення.	16	3	3	10	[1] – [3]
2.	Функціонал. Лінійні неперервні функціонали.	17	3	3	11	[1],[3]
3.	Варіація функціонала та її властивості	17	4	4	9	[1] – [3]
<b>Змістовий модуль 2. Метод варіацій Варіаційні задачі на екстремум</b>						
4.	Метод варіацій у задачах на безумовний екстремум	16	3	3	10	[4] -[6]
5.	Екстремум функціонала за наявності скінченних та диференційних зв'язків.	17	3	31	11	[7]
6	Ізопериметричні задачі.	17	4	4	9	[8]
<b>Змістовий модуль 3. Прямі методи у варіаційних задачах</b>						
7.	Сутність прямих методів варіаційного числення.	16	3	3	10	[9]
8.	Метод Ейлера. Метод Рітца.	17	3	3	11	[7], [9]
9	Метод Канторовича. Метод скінченних елементів.	17	4	4	9	[7], [9]
<b>Усього годин</b>		<b>150</b>	<b>30</b>	<b>30</b>	<b>90</b>	

Л – лекції, П (С) – практичні (семінарські) заняття, СРС – самостійна робота студентів.

### 5. САМОСТІЙНА РОБОТА

Уміння студентів самостійно працювати над вивченням конкретного предмета – важливий чинник підвищення якості підготовки спеціалістів.

Самостійна робота студента (денна форма навчання) включає підготовку до практичних занять; самостійне опрацювання додаткової літератури та питань для самоконтролю засвоєння змісту навчального матеріалу, а також підготовку рефератів, есе, доповідей та самостійних домашніх (творчих) завдань за тематикою, що наведено у методичних вказівках до самостійної роботи.

Враховуючи це, рекомендуються наступні **форми організації самостійної роботи студентів:**

- підготовка до практичних занять;
- самостійне опрацювання додаткової літератури до тем лекційного курсу і практичних (семінарських) занять, а також літератури для підготовки самостійного домашнього завдання;
- підготовка доповідей, рефератів та есе за тематикою лекцій і семінарів;
- самостійне опрацювання питань для самоконтролю засвоєння змісту лекційного матеріалу з курсу.

### 5.1 Перелік тем для самостійного вивчення

№ з\п	Підготовка до практичних занять та виконання самостійного домашнього завдання за теми	Кількість годин
1	Предмет варіаційного числення. Приклади задач, що розв'язуються методами варіаційного числення.	10
2	Функціонал. Лінійні неперервні функціонали.	11
3	Варіація функціонала та її властивості.	9
4	Метод варіацій у задачах на безумовний екстремум.	10
5	Екстремум функціонала за наявності скінченних та диференційних зв'язків.	11
6	Ізопериметричні задачі.	9
7	Сутність прямих методів варіаційного числення.	10
8	Метод Ейлера. Метод Рітца.	11
9	Метод Канторовича. Метод скінченних елементів.	9
<b>Разом за курсом</b>		<b>90</b>

### 5.2 Розрахунок часу для самостійної роботи студента за видами

№ з\п	Вид роботи	Кількість годин
1	Опрацювання програмного матеріалу, що викладається на лекціях	20
2	Підготовка до практичних занять	20
3	Виконання індивідуальних завдань (рефератів, творчих, розрахунково-графічних робіт, презентацій тощо)	15
4	Підготовка до контрольних заходів (модульна контрольна робота)	15
5	Підготовка самостійного домашнього завдання	20
<b>Разом</b>		<b>90</b>

**Самостійна робота виконується у відповідності до методичних вказівок до самостійної роботи студента.**

## 6. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Метою індивідуального завдання є ґрунтовне усвідомлення суттєвих властивостей основних понять курсу, закріплення основних теорем та формування практичних вмінь студентів.

Виконання індивідуального завдання передбачає розв'язання студентами задач з методичних посібників за наступними темами:

1. Предмет варіаційного числення. Приклади задач, що розв'язуються методами варіаційного числення.
2. Функціонал. Лінійні неперервні функціонали.
3. Варіація функціонала та її властивості.
4. Метод варіацій у задачах на безумовний екстремум
5. Екстремум функціонала за наявності скінченних та диференційних зв'язків.
6. Ізопериметричні задачі.
7. Сутність прямих методів варіаційного числення.
8. Метод Ейлера. Метод Рітца.
9. Метод Канторовича. Метод скінченних елементів. Геометричні побудови. Розв'язування задач методом геометричних перетворень.

## 7. МЕТОДИ НАВЧАННЯ

- Під час викладання курсу використовуються наступні методи навчання:
- розповідь – для оповідної, описової форми розкриття навчального матеріалу;
  - пояснення – для розкриття сутності певного явища, закону, процесу;
  - бесіда – для усвідомлення за допомогою діалогу нових явищ, понять;
  - ілюстрація – для розкриття предметів і процесів через їх символічне зображення (малюнки, схеми, графіки);
  - практична робота – для використання набутих знань у розв'язанні практичних завдань;
  - аналітичний метод – уявного або практичного розкладу цілого на частини з метою вивчення їх суттєвих ознак;
  - індуктивний метод – для вивчення явищ від одиничного до загального;
  - дедуктивний метод – для вивчення навчального матеріалу від загального до окремого, одиничного;
  - проблемний виклад матеріалу – для створення проблемної ситуації.

## 8. МЕТОДИ КОНТРОЛЮ І ПИТАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗАСВОЄННЯ МАТЕРІАЛУ

Для визначення рівня засвоєння студентами навчального матеріалу використовують такі форми та методи контролю і оцінювання знань:

- оцінювання роботи студента під час практичних занять у вигляді усного опитування або виконання розрахункових завдань;
- написання підсумкових модульних контрольних та тестових робіт;
- оцінювання виконаного самостійного домашнього завдання та його захисту;
- складання іспиту.

Оцінку знань студентів з дисципліни «Основи варіаційного числення» здійснюють відповідно до положення ДДМА про організацію навчального процесу. Ця система базується на здійсненні наскрізного поточного контролю на аудиторному занятті у відповідності до його форми (лекційної, практичної).

Підсумковою оцінкою поточного контролю є оцінка за модуль, тобто реалізується принцип модульного обліку знань студентів.

Навчальним планом з дисципліни «Основи варіаційного числення» передбачено складання іспиту. Для оцінювання знань використовують стобальну шкалу оцінювання ECTS.

### ***Порядок здійснення поточного оцінювання знань студентів.***

Поточне оцінювання знань студентів здійснюється під час проведення практичних занять і має на меті перевірку рівня підготовленості студента до виконання конкретної роботи. Об'єктами поточного контролю є:

- активність та результативність роботи студента протягом семестру над вивченням програмного матеріалу дисципліни, відвідування занять;
- виконання завдань на практичних заняттях;
- виконання завдань поточного контролю.

*Робота студентів на лекціях та практичних заняттях* оцінюється за 60-бальною системою. При оцінюванні виконання практичних завдань увага приділяється їх якості й самостійності.

*Контроль* виконання самостійного домашнього завдання передбачає виявлення опанування студентом матеріалу лекційного модуля та вміння застосувати його для вирішення практичної ситуації і проводиться у вигляді захисту самостійного домашнього завдання.



**Підсумкова кількість балів за поточні роботи семестру** оцінюються за 100-бальною системою.

***Проведення підсумкового контролю.***

Іспит та диференційний залік здійснюються в письмовій формі за контрольними питаннями, які сформовані у екзаменаційні(залікові) білети, що дають можливість здійснити оцінювання знань студента з матеріалами семестру. **Екзаменаційні(залікові) відповіді** за білетами оцінюються за 100-бальною системою.

**Підсумкова оцінка семестр** – середнє арифметичне поточної оцінки семестру та екзаменаційної оцінки.

## **ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ**

### ***1 семестр***

1. Предмет варіаційного числення.
2. Приклади задач, що розв'язуються методами варіаційного числення.
3. Функціонал.
4. Лінійні неперервні функціонали.
5. Варіація функціонала та її властивості.
6. Метод варіацій у задачах на безумовний екстремум
7. Екстремум функціонала за наявності скінченних та диференційних зв'язків.
8. Ізопериметричні задачі.
9. Сутність прямих методів варіаційного числення.
10. Метод Ейлера.
11. Метод Рітца.
12. Метод Канторовича.
13. Метод скінченних елементів.

## 9.

**РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ****1 семестр**

Вид заняття або контрольного заходу	Балів за одно заняття або контрольний захід	За семестр		До 1-й атестації	
		кількість занять або контр. заходів	сума балів	кількість занять або контр. заходів	сума балів
Поточн.контр.	20	2	40	1	20
Модул.контр.	20	3	60	1	20
Сума за семестр (ССО)			100		40
Іспит (30)			100		
Всього ((ССО+30)*0,5)			100		

За участь у науковій роботі, вивчення спеціальної літератури і поглиблене вивчення курсу студенту можуть призначатися додаткові бали, але не більше ніж 10 балів. Зразки модульних контролів знаходяться у додатках

**Шкала оцінювання**

Переведення набраних студентом балів за 100-бальною шкалою в оцінки за національною (5-бальною) шкалою та шкалою ECTS здійснюється в відповідності до таблиці:

Рейтинг студента за 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою	Оцінка за шкалою ECTS
90-100 балів	відмінно	A
81-89 балів	добре	B
75-80 балів	добре	C
65-74 балів	задовільно	D
55-64 балів	задовільно	E
30-54 балів	незадовільно з можливістю повторного складання	FX
1-29 балів	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	F

## 10. РЕКОМЕНДОВАНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА

### Базові

1. Ващук Ф.Г., Лавер О.Г., Шумило Н.Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник.— К.: Знання, 2008.— 368 с.
2. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. —К.: Либідь, 1996. — 440 с.
3. Высшая математика: Сборник задач /Х.И.Гаврильченко, А.Ф.Кривой, П.С.Кропивянский и др. — К.: Вища шк., 1991. — 455 с.

### Методичне забезпечення

1. Грудкіна Н.С. Основи варіаційного числення (курс лекцій). методичні вказівки до семінарських занять та самостійної роботи для студентів спеціальності 014 Середня освіта (математика) – Краматорськ : ДДМА, 2021.

2. Грудкіна Н.С., Дмитришин І.С. Методичні вказівки до практичних занять і самостійного вивчення курсу «Основи варіаційного числення» методичні вказівки до семінарських занять та самостійної роботи для студентів спеціальності 014 Середня освіта (математика) – Краматорськ : ДДМА, 2021.